Ejercicio Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 3

Roger Balsach

6 de febrer de 2019

Definimos el valor esperado de una cierta cantidad como:

$$\langle \square \rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \square e^{-\frac{a}{2}x^2} \mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} \mathrm{d}x} \tag{1}$$

Javier ya ha calculado el denominador en el capítulo 3, sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}, \qquad \text{si } a > 0. \tag{2}$$

Y por lo tanto

$$\langle \square \rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \square e^{-\frac{a}{2}x^2} \mathrm{d}x \tag{3}$$

1 Cálculo de $\langle x \rangle$

Usando la definición de valor esperado (3)

$$\langle x \rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{a}{2}x^2} \mathrm{d}x \tag{4}$$

Vemos que el integrando es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, es fácil ver que la integral de una función impar en el intervalo $[-c, c]$ vale cero, pues como puede verse en la figura 1 las áreas en verde se cancelan.

Por este motivo la integral (4) es cero.

$$\langle x \rangle = 0 \tag{5}$$

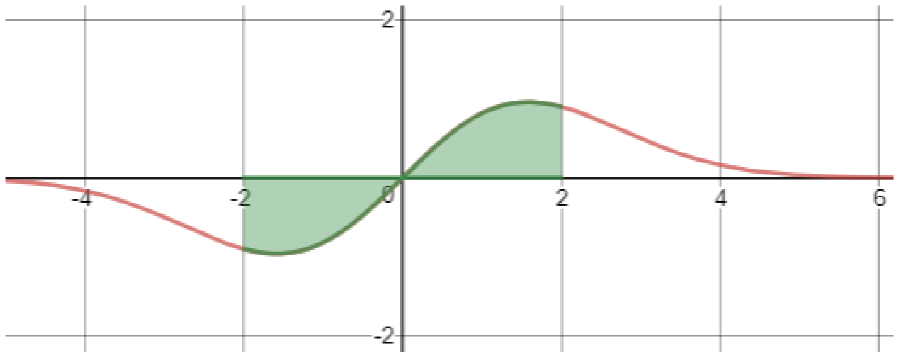

Figura 1: Gráfico de la función xe^{-ax^2}, y el área entre -2 y 2.

2 Cálculo de $\langle x^2 \rangle$

De nuevo a partir de la definición (3) tenemos que

$$\left\langle x^2 \right\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} \mathrm{d}x \tag{6}$$

En este caso la integral ya la tenemos calculada en el capítulo 3 de la serie, y sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}^3} \Longrightarrow \left\langle x^2 \right\rangle = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a^3}} \sqrt{2^3} = \frac{1}{a} \tag{7}$$

3 Cálculo de $\langle x^{2n} \rangle$

Javier nos ha dado una pista, sabemos que debemos demostrar que

$$\left\langle x^{2n} \right\rangle = \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{1}{a^n} \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{a^n} \frac{(2n)!}{[2(n)][2(n-1)][2(n-2)]\cdots[2 \cdot 2]\cdot[2 \cdot 1]} = \frac{(2n)!}{(2a)^n n!} \equiv \frac{(2n-1)!!}{a^n} \tag{9}$$

Donde simplemente he simplificado los $\cdots$ usando la función matemática *factorial*[1]. Ahora simplemente debemos demostrar esta expresión, podemos usar el método de demostración por inducción.

[1]Se define n factorial como $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Vamos a demostrar que

$$\int x^{2n} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(2n+1)}}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(2n+1)}}} \tag{10}$$

Puede parecer una ecuación muy complicada pero si calculamos los primeros términos veréis que en realidad no es para tanto, simplemente una forma de evitar escribir productos muy largos

$$\int x^0 e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{0!}{2^0 0!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(0+1)}}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
$$\int x^2 e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{2!}{2^2 1!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(2+1)}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$
$$\int x^4 e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{4!}{2^4 2!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(4+1)}}} = \frac{3}{2}\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$
$$\int x^6 e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{6!}{2^6 3!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(6+1)}}} = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^7}}$$
$$\int x^8 e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{8!}{2^8 4!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(8+1)}}} = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^9}}$$

Y así sigue indefinidamente añadiendo los números impares en el numerador y 2 al denominador. Vamos a demostrarlo por inducción, ya hemos visto que los término de $n = 0$ y $n = 1$ se cumplen (lo demuestra Javier en el capítulo 3). Vamos a suponer ahora que esto es cierto para un cierto valor $n = k - 1$, y demostremos que entonces también se cumple para $n = k$:

$$\int x^{2(k-1)} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(2k-1)}}} \tag{11}$$

Derivando ambos lados respecto de a:

$$-\int x^{2k} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!} \sqrt{\pi} \frac{\mathrm{d}a^{-(2k-1)/2}}{\mathrm{d}a} = -\frac{(2k-1)}{2} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}}$$

Que podemos escribir como

$$\int x^{2k} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{2k}{2k} \frac{(2k-1)!}{2^{2k-1}(k-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{(2k+1)}}} = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}} \tag{12}$$

Fijaos que hemos demostrado que si se cumple para un número k entonces se cumple también para $k + 1$, como además hemos visto que se cumple para $n = 1$ esto implica que debe cumplirse para $n = 2$, pero si se cumple para $n = 2$ tiene que cumplirse para $n = 3$ etc. Por lo que hemos demostrado que para todo natural la relación (10) se cumple. Con esto ya podemos calcular $\langle x^{2n} \rangle$ pues según (3)

$$\left\langle x^{2n} \right\rangle = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\frac{\pi 2^{2n+1}}{a^{2n+1}}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\frac{2^{2n}}{a^{2n}}} = \frac{1}{a^n} \frac{(2n)!}{2^n n!} \tag{13}$$

Que es justo la expresión (9) que nos ha dado Javier.